

De bevolking van Oeganda

In 2012 publiceerde A. Wali een studie naar de bevolkingsomvang van het Afrikaanse land Oeganda. Volgens Wali kan deze omvang beschreven worden met een model van de vorm:

$$U_W = \frac{a}{1 + b \cdot g^t}$$

Hierin is U_W het aantal inwoners van Oeganda en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980.

Wali gebruikte de waarden $a = 295\,267\,612$, $b = 22,78367259$ en $g = 0,965$.

In de tabel kun je zien dat zijn model voor de jaren 1980-2010 waarden van U_W opleverde die verrassend goed overeenkwamen met de werkelijke waarden.

tabel

jaar	werkelijke populatie	berekende populatie	jaar	werkelijke populatie	berekende populatie
1980	12 414 719	12 414 719	1996	21 248 718	21 266 298
1981	12 725 252	12 845 405	1997	21 861 011	21 980 197
1982	13 078 930	13 290 330	1998	22 502 140	22 716 074
1983	13 470 393	13 749 915	1999	23 227 669	23 474 471
1984	13 919 514	14 224 592	2000	23 955 822	24 255 934
1985	14 391 743	14 714 799	2001	24 690 002	25 061 014
1986	14 910 724	15 220 984	2002	25 469 579	25 890 262
1987	15 520 093	15 743 605	2003	26 321 962	26 744 234
1988	16 176 418	16 283 127	2004	27 233 661	27 623 485
1989	16 832 384	16 840 024	2005	28 199 390	28 528 571
1990	17 455 758	17 414 779	2006	29 206 503	29 460 048
1991	18 082 137	18 007 881	2007	30 262 610	30 418 471
1992	18 729 453	18 619 830	2008	31 367 972	31 404 390
1993	19 424 376	19 251 129	2009	32 369 558	32 418 352
1994	20 127 590	19 902 293	2010	33 398 682	33 460 902
1995	20 689 516	20 573 841			

Sommige mensen waren onder de indruk van de mate van overeenstemming tussen beide series getallen. "Het model wijkt nergens meer dan 2% af van de werkelijkheid", zei één van hen.

- 3p 4 Toon met een berekening aan dat deze bewering onjuist is door een jaartal te geven waarin de afwijking groter is dan 2%.

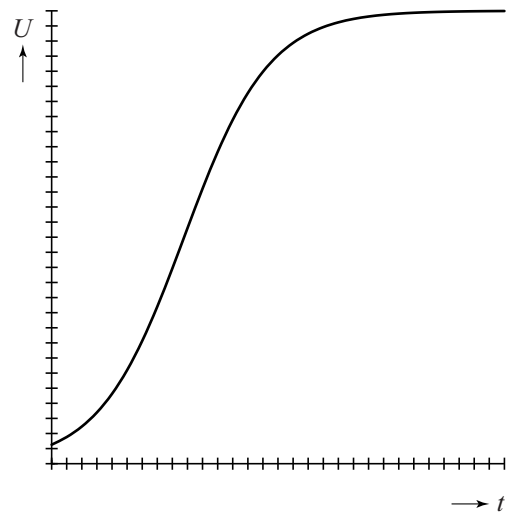
Het is niet handig als de constanten in een model heel veel cijfers voor of na de komma hebben. In het vervolg van deze opgave werken we daarom met het volgende model:

$$U = \frac{300}{1 + 22,8 \cdot 0,965^t}$$

Hierbij is U het aantal inwoners van Oeganda in miljoenen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1980.

In de figuur kun je zien dat dit model een grenswaarde voorspelt voor de bevolkingsomvang van Oeganda. De horizontale as loopt van 1980 tot 2280.

figuur



- 3p **5** Bereedeneer, zonder getallen in de formule in te vullen, welke grenswaarde bij dit model hoort.

Voor de afgeleide van U geldt:

$$\frac{dU}{dt} \approx \frac{244 \cdot 0,965^t}{(1 + 22,8 \cdot 0,965^t)^2}$$

- 4p **6** Toon dit aan.
- 4p **7** Onderzoek met behulp van de afgeleide in welk jaar de bevolking van Oeganda volgens het model het snelst toeneemt.